核融合プラズマの数値計算(数理計算技術の基礎理論)

竹田, 辰興

数理解析研究所講究録
第832巻1993年33-49

核融合プラズマの数値計算

日本原子力研究所

竹田辰興 (Tatsuoki Takeda)

1. 核融合研究の概要

核融合は、燃料資源や環境の面から未来のエネルギー源として大きな期待が持たれており、核融合炉の開発研究が精力的に進められている。特に、国際協力による核融合実験炉ＩＴＥＲの工学設計活動（ＩＴＥＲ－ＥＤＡ）が始まり核融合研究は新しい時代を迎えた。核融合研究が大きく進展してきた時期に計算機も急速にその能力を向上させてきており、核融合研究を発展させる上で計算機が果たしている役割は計り知れない。核融合装置は大きな工学システムで、例えば原子炉等の他の工学システムと共通する種類の数値計算も多数ある。しかし、核融合炉を特徴づけるのは炉心プラズマであり、その物理現象解析のために多くの数値計算がなされている。より良い炉心の開発のためには炉心プラズマについての未知の物理問題の解明が大切で、大規模なシミュレーションを中

心とする数値計算は理論解析、実験解析や装置設計にとって不可欠の手段として一層その重要性を増してきている。このような核融合プラズマの数値計算について概観する。特に、現在最も核融合炉に近い装置であるトカマク装置のプラズマを念頭において議論を進める。

まず、炉心プラズマの数値計算について理解する上で必要な最小限の知識についてまとめておく。核融合反応は、水素の同位体のような比較的軽い原子核同士が衝突してエネルギーを発生する反応である。色々な反応が考えられるが、反応の確率が高く反応持続の条件が達成しやすいことから、現在の核融合炉研究開発はＤＴ反応（$D+T \rightarrow {}^{4}He+n+17.6MeV$；D：重水素、T：三重水素、${}^{4}He$：ヘリウム、n：中性子）を対象としている。核分裂反応では電気的に中性の中性子が介在して反応が持続するのに対して、核融合反応では共に正電荷を持つ原子核同士を反応が起こる距離まで近付けなければならないという困難がある。このため、普通は、粒子に十分高いエネルギーを与えて原子核のクーロン障壁を越えさせて反応を起こす。最も単純には、高エネルギーの荷電粒子ビームを衝突させて反応を起こさせる（ビーム衝突型核融合）ことが考えられるが、この方法では、一般に、入力エネルギーよりも大きな出力エネルギーを得ることは期待できない。そこ

で、燃料粒子を高温のプラズマにしてその中で反応を持続させる（熱核融合）ことが考えられた。

熱核融合炉では、反応の持続のためにプラズマを加熱するのに要するエネルギーが核融合炉からの出力エネルギーよりも大きくなる条件（ローソン条件）を満たすことが必要である。これは、$n\tau_E > f(T)$ （n：プラズマ密度、τ_E：エネルギー閉じ込め時間、T：温度）の形で表すことができる。ＤＴ核融合炉実現のために、トカマクでは、密度$10^{20}\mathrm{m}^{-3}$、温度10keV、エネルギー閉じ込め時間1s程度でこの条件が満たされる。

トカマク型核融合装置は、トーラス状のプラズマに強い電流（トロイダル電流）を流して磁気流体的(MHD)平衡を達成し、トーラス方向にかけた強い磁場（トロイダル磁場）によって安定性を保証する閉じ込め装置である。プラズマを加熱するためには、高エネルギーの中性粒子を入射したり、高周波を入射する。装置の概念図を第１図に示す。

２．　核融合プラズマと基礎方程式

数値計算の立場から見たとき、核融合プラズマの大きな特色はその空間スケールと時間スケールが極めて広範囲に亘っていることである。核融合炉の炉心としての条件を満たすプラズマを想定すると、関係する特性時間は電子サイクロトロン振動やプラズマ振動の10^{-11}s程度から磁場拡散時間の10^{2}s

程度までの10^{13}、特性長は粒子間距離の10^{-7}m程度から平均自由行程の10^{3}m程度までの10^{10}もの広い範囲に亘って分布している。これらの特性時間、特性長の全てを含んで全体の系を記述する多粒子系方程式系であるクリモントビッチ方程式をもとに、平均操作や種々の簡約化過程を経て幾つかの重要な基礎方程式を得ることができる（第２図）。

トカマク・プラズマは、比較的定常に近く、等方的でもあって、その基本的な振舞は磁気流体力学（ＭＨＤ）方程式によってよく記述される。しかし、プラズマの加熱過程を解析したり、輸送現象の基礎過程を厳密に議論するためには粒子の速度分布関数の変化について考察しなければならないので、プラズマ運動論方程式に立ち戻った解析を行う必要がある。また、磁気流体力学的現象であっても、場合によっては、運動論効果が重要な役割を果たしていることもある。

３． 磁気流体力学モデルによる数値計算

磁気流体力学（ＭＨＤ）モデルは次の基礎方程式によって記述される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right] = -\nabla p + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla p + \Gamma p\,\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\,\mathrm{rot}\boldsymbol{E}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = \eta\boldsymbol{J}$$

ここで、ρ、p、v、J、E、及びBはプラズマ密度、圧力、速度、電流密度、電場、及び磁束密度を表しており、η、Γ、及びμ_0は、それぞれ、電気抵抗率、比熱比、及び真空の透磁率である。プラズマの散逸は、最後の一般化オームの法則の式の電気抵抗ηを通じて発生する。そこでηを０とすることによって全く散逸の無いモデル（理想ＭＨＤモデル）が得られる。これに対して有限のηを持つモデルを抵抗性ＭＨＤモデルと称する。粘性等他の散逸過程を含むモデル（非理想ＭＨＤモデル）を考えることもできる。

上の方程式において$v=0$、$\partial/\partial t=0$とすることによって次のＭＨＤ平衡を記述する基本方程式系が得られる。

$$\nabla p = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = 0$$

この平衡方程式系を満たすような解が存在する場合にその安定性を調べることがＭＨＤ解析の重要な課題である。

この平衡方程式系から明らかなように、圧力の等しい面は磁場ベクトル及び電流ベクトルの積分面になっている。この

面を磁気面と呼ぶ。このような面が３次元空間で閉じた面を形成するためにはトーラス状をしていなければならないので、トカマク・プラズマの安定なＭＨＤ平衡は入れ子状のトーラス状磁気面から構成されている。磁力線は磁気面上を螺旋状に回っている。磁力線がトーラスを有限回まわって元の点に戻るような磁気面を有理面と呼び、そうでない磁気面を非有理面と呼ぶ。有理面では不安定性モードの変位が磁力線のピッチに共鳴して成長しやすいので、そのモードの共鳴面とも呼ぶ。このように磁気面毎に定義される磁力線のピッチは安全係数 q と呼ばれ、トーラス・プラズマの磁気流体力学的振舞を支配する重要な量である。トーラス・プラズマのＭＨＤ挙動を解析する際には、普通、磁気面を特徴付ける量（磁気面量）を座標の一つとして持つ磁束座標系が用いられる。

軸対称性を仮定して、前に述べた平衡方程式系を変形すると次に示すグラド・シャフラノフ方程式が得られる。

$$\Delta^*\psi \equiv r^2 \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\psi}{r^2}\right) = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \mu_0 r J_\phi(r,\psi)$$

$$J_\phi(r,\psi) = -r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\psi} - \frac{1}{\mu_0}\frac{F}{r}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\psi}$$

ここで、(r,ϕ,z) 円柱座標系を使っている。解 ψ はポロイダル磁束で磁気面量となっていて、しばしば磁束座標系の一つの座標として使われる。なお、磁場は次のように表される。

$$B = \nabla\phi\times\nabla\psi + F\nabla\phi$$

これまで述べた方程式系をもとにして種々のＭＨＤ解析（①ＭＨＤ平衡解析、②線形理想ＭＨＤ安定性解析、③抵抗性ＭＨＤ不安定性解析）が行なわれる。現在のトカマク・プラズマの研究において重要な現象や課題のうち次に上げるものは、上のＭＨＤ解析に深い関係がある。

（１）高ベータ安定平衡の追及（①、②）：ベータ値はプラズマ圧力と磁気圧の比として定義される量で、核融合炉として成立するためにはある程度以上のベータ値に対してＭＨＤ平衡が安定である必要がある。このため、高いベータ値を持つ平衡の探索は重要な課題で、ベータ値限界を支配している線形理想ＭＨＤ安定性解析が重要である。

（２）ディスラプション現象の理解と制御・抑制（③）：ディスラプション現象は、トカマク・プラズマにおいて見られる一群の非線形現象で、突然平衡が崩れてプラズマや電流が消失する大ディスラプションやプラズマ中心部の温度が鋸歯状振動をする内部ディスラプションがある。輸送過程が関係した複雑な現象と見られているがその過程の中で非線形ＭＨＤ現象も重要な働きをしている。

以下、上にあげた３種類のＭＨＤ解析について説明する。

<u>**ＭＨＤ平衡解析**</u>

グラド・シャフラノフ方程式の解を求めることは、ＭＨＤ

解析を行なう上で最も基本的なことであるので、数値解析法に関しても多くの研究がなされている。特に、線形理想ＭＨＤ安定性解析のためにＭＨＤ平衡を使う場合には、グラド・シャフラノフ方程式の解には極めて高い精度が要求される。

グラド・シャフラノフ方程式の左辺はポアソン方程式とほとんど同じものであるから、その解法も同じものが使える。安定性解析の目的にしばしば用いられるのはサイクリック・リダクション法である。ＭＨＤ平衡解析に特徴的な性質は、右辺の処理と境界条件の与え型に現われる。

グラド・シャフラノフ方程式の右辺は磁束密度ψの関数として$f(\psi, r)$の形で与えられる。そこで、方程式を解く際には、例えば、ψの関数として圧力分布形状を与えて、トーラス一周電圧を非線形固有値Sとして、単純反復法をつかって、非線形固有値問題を解くという方法が採られる。

本来、磁気閉じ込め装置は、磁場の力で高温プラズマを真空中に保持することが目的であるから、プラズマ表面の外側が真空になっている自由境界平衡を解かねばならないように考えられる。しかし、現在の大型トカマクでは、制御系の発展に伴いプラズマ表面の位置と形はよく制御されており、ＭＨＤ安定性解析のための平衡解析では、表面のいくつかの点を固定点として与える「半固定境界条件」を使うのが普通で

ある。ＭＨＤ平衡解は、ポロイダル断面内にとった矩形の計算領域内（第３図）で逐次近似計算を行ない、プラズマ表面があらかじめ定められて点を通るように外部コイルの電流を調整するしながら収束させて求める。

線形理想ＭＨＤ安定性解析

線形化した理想ＭＨＤ方程式系については、ラグランジアンが次のように与えられる。

$$L = W_{\mathrm{P}} + W_{\mathrm{V}} - \omega^2 W_{\mathrm{K}}$$

$$W_p = \frac{1}{2}\int_{\text{plasma}}\left\{\frac{1}{\mu_0}|\boldsymbol{Q}_\perp|^2 + \frac{1}{\mu_0}\left|\boldsymbol{Q}_{/\!/} - \frac{\mu_0}{B^2}(\xi\cdot\nabla p_0)\boldsymbol{B}\right|^2 + \Gamma p_0|\mathrm{div}\xi|^2 - \frac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{B}}{B^2}(\xi\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{Q} - 2(\vec{\kappa}\cdot\xi)(\xi\cdot\nabla p_0)\right\}d\tau$$

$$W_V = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\text{vacuum}}|\boldsymbol{Q}|^2 d\tau \quad 、\qquad W_K = \frac{1}{2}\int \rho_0|\xi|^2 d\tau$$

この表式に基づき、有限要素法を使って、行列の固有値問題を導き、固有値ω^2から系の安定性を求める計算コードがいくつかある。この方法が確立するまでに、ＭＨＤスペクトルの基本的性質に関わる困難を克服する必要があった。それは、連続スペクトルの存在によるスペクトル汚染の問題で、普通の有限要素法では解が得られなかった。第４図は、１次元の簡単なモデルについてのスペクトル汚染の様子を示したものである。この問題について、多くの数学的研究がなされたが、

具体的には、変数自身とその微分を展開する基底関数に同じものを使う混成有限要素法を採用することで解決できた。固有値問題を解くべき行列は一般に十万元を越えること、普通必要なのは最低固有値１個であることから、固有値解法としては原点シフトを併用した逆冪法が用いられている。

<u>抵抗性ＭＨＤ不安定性解析</u>

プラズマ中の抵抗の効果は共鳴磁気面において現われ、磁力線をつなぎかえて磁気面のトポロジーを変化させる。現在この不安定性の解析には非線形シミュレーションが主流であるが、多大の計算時間がかかる上、抵抗の効果の効く極めて薄い層を取り扱うという数値的困難や抵抗層で非ＭＨＤ的効果を必要とするという物理的困難があり、高精度の解析をするためには新しい取り扱い法の開発が望まれる。

非線形ＭＨＤ挙動のシミュレーションを行なうには、先に記した抵抗性ＭＨＤ方程式系（完全系）の時間積分を行なえばよいが、この完全系は最小時間スケールとしてアルフベン時間（圧縮性アルフベン時間）を持っており興味あるＭＨＤ現象を再現するには時間スケールの幅が極めて大きい。計算機の進歩に連れて、完全系のシミュレーションも行なわれるようにはなってきたが、精度のよい計算を効率的に行なうには重要な時間スケールは保存して短い時間スケールの現象を

省くように基礎方程式を変形してシミュレーションを行なうのが普通である。トカマク・プラズマのディスラプション現象に関係したシミュレーションを行なう際には、トカマク・オーダリング（トーラス小半径が大半径に比べて十分小さいとするオーダリング）を使って得られる簡約方程式系がよく用いられる。この方程式系を用いると、最小時間スケールはほぼ１０倍となり、変数の数も、圧力p、速度$\boldsymbol{v}$、磁場$\boldsymbol{B}$の８個から圧力P、渦度U、ポロイダル磁束関数Ψの３個に減りシミュレーションはかなり容易になる。

実際に、シミュレーションでディスラプションを再現するには、ＭＨＤ現象以外の効果を適切に考慮しなければならない。ディスラプション現象において基本的役割を果たすＭＨＤ挙動を見るために、簡約抵抗性ＭＨＤ方程式系と電子温度輸送方程式を組み合わせて行なった、鋸歯状崩壊に関するシミュレーションの例を示す（第５図）。鋸歯状崩壊が起こり、電流分布が外側で急峻になり、高モード数のテアリング・モードが不安定化して、磁気島が成長し、磁力線が乱雑化していく様子がわかる。

４．　粒子モデル・シミュレーション

現実のトカマク・プラズマの密度は$10^{20}\mathrm{m}^{-3}$前後である。これに対して、現在の計算機で実際に追跡できる粒子の数は精

々10^6から10^7個程度である。しかし、われわれの興味の対象が長距離力に基づく集団現象である時、デバイ半径よりも短い空間スケールは無視してよく、デバイ半径の球（デバイ球）の中に含まれる粒子数程度の粒子をひとまとめにした超粒子を採用することができる。N_s個の粒子をひとまとめにした超粒子からなるプラズマでは、粒子の電荷、質量、平均運動エネルギーはN_s倍となり、密度、デバイ球内の粒子数は$1/N_s$倍になる。このようなプラズマ・モデルを超粒子モデルとよぶ。

超粒子モデルによって、追跡すべき粒子数は計算可能な大きさまで減らせるが、このままでは電荷が大きくなったことによる近距離相互作用の増大によってシミュレーションができない。これを解決したのが有限サイズ粒子のモデルである。

粒子モデルは今まで主として基礎的な輸送過程の解明、特に高周波物理の解明に用いられて成功してきたが、トカマク・プラズマの輸送解析のように幾何学形状やパラメータ分布が複雑な系の総合的な解析には応用することは困難だった。これは、計算機能力が不足していたことに主要な原因があるが、最近では超並列計算機技術の発達で超高速計算の見通しも立ち、又、粒子シミュレーション・モデルの進歩もあって、近い将来には粒子シミュレーションがトカマク・プラズマの輸送過程の解明に大きな役割を果たすものと期待されている。

5. その他の数値計算

トカマク・プラズマの解析に用いられるその他の計算コードのいくつかについて以下に簡単に述べる。

トカマク輸送コード

トカマク実験におけるデータ解析や装置設計に際してのプラズマ性能予測になくてはならないシミュレーション・コードにトカマク（輸送）コードがある。このコードは基本的には、半径を空間座標に採って、密度、温度、磁場等についての空間1次元の輸送方程式系の時間積分をするものである。従って、輸送係数などは外部から既知の関数形を与える。半径の代わりに、磁束座標形の磁気面量を採り角度変数については平均して磁気面のメトリック量をとりこめば平衡の変化に追随したシミュレーションが行なえる。この場合には、MHD平衡方程式と輸送方程式を交互に解いてシミュレーションを行なう。この場合、2次元の効果がメトリック量を通して入っているので、1.5次元トカマク・コードと呼ぶ。

フォッカー・プランク・コード

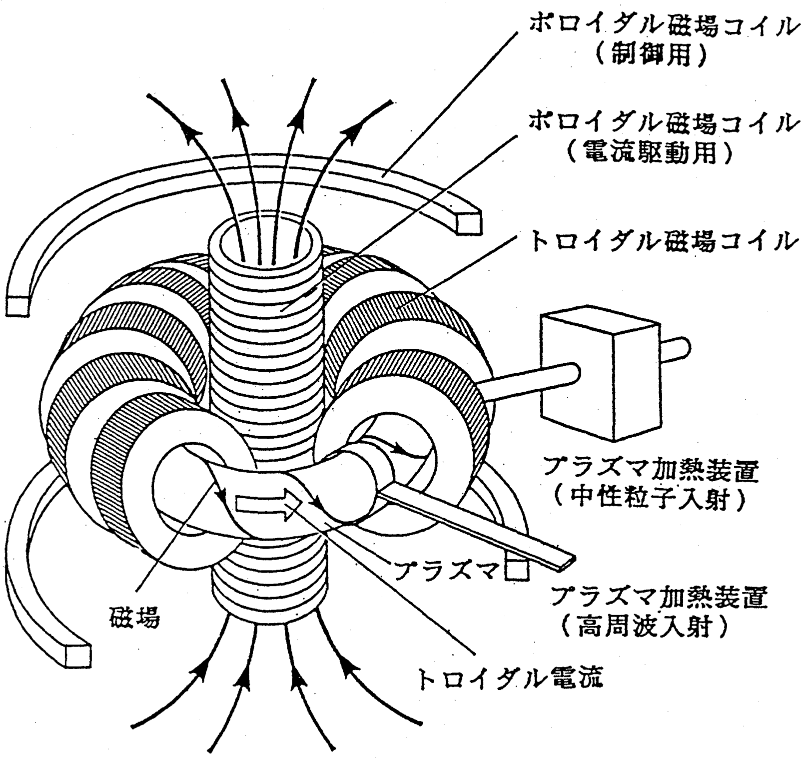
イオンの速度分布関数がマックスウェル型ではなく、衝突によって分布関数が変化する様子を知ることが重要な場合がしばしばある。このような時に用いられるのがフォッカー・プランク・コードである。トカマク・プラズマの研究におい

て遭遇するこれらの問題の例として、中性粒子ビームによるプラズマの加熱過程、高周波によるプラズマの加熱・電流駆動過程、核燃焼プラズマ中のアルファ粒子の熱化過程、および逃走電子の挙動の解析等がある。

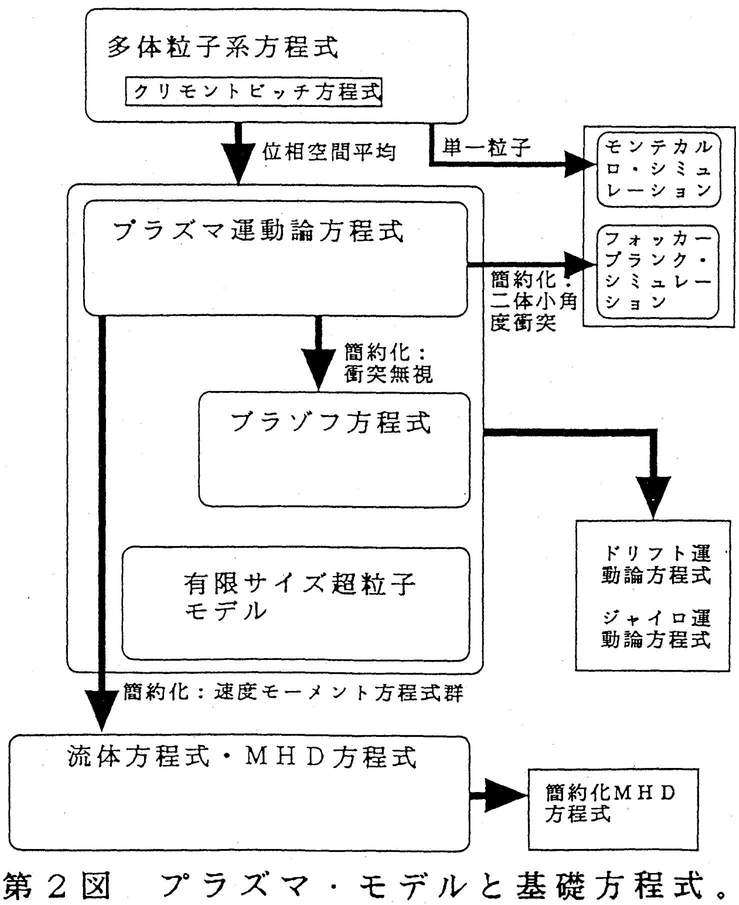
軌道追跡モンテカルロ・コード

トカマクは原理的には軸対称な装置であるが、実際はトロイダル・コイルが離散的であることなどによって厳密には軸対称でない。このような非軸対称性による効果で最も重要なものの一つがリップルのあるトロイダル磁場中の高エネルギー粒子の拡散である。これは、離散的コイルによってトロイダル磁場に生じたリップル中に捕捉された粒子が大きな拡散を受けるという現象で個々の粒子を追跡し、統計処理をして解析する。粒子の軌道を追跡するという意味では先に述べた粒子モデル・シミュレーションと同様であるが、相互作用しない独立な多数の粒子を追跡するという点で全く異なるものである。拡散の時間スケールと最小時間スケールの違いが大きいので極めて大きな計算時間を必要とする問題である。

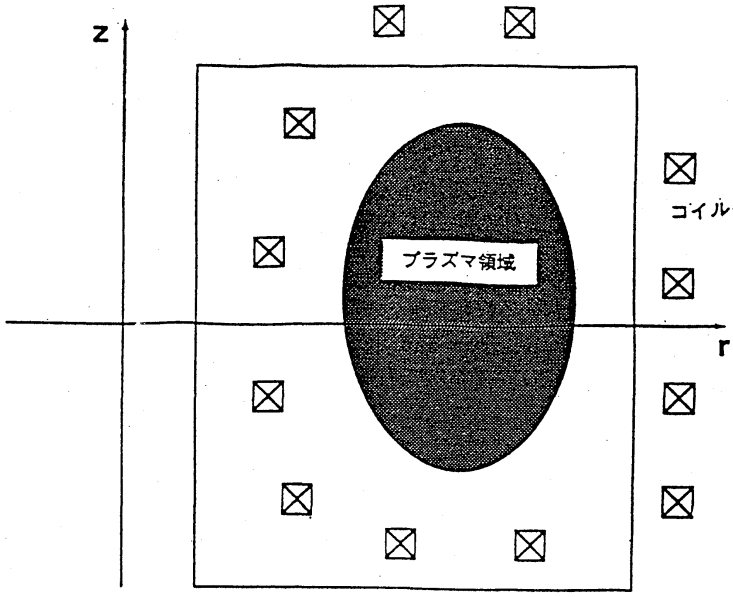
このコードは核燃焼生成物であるアルファ粒子のリップル拡散の評価や中性粒子入射加熱で生じる高速イオンの拡散損失の解析に使われている。



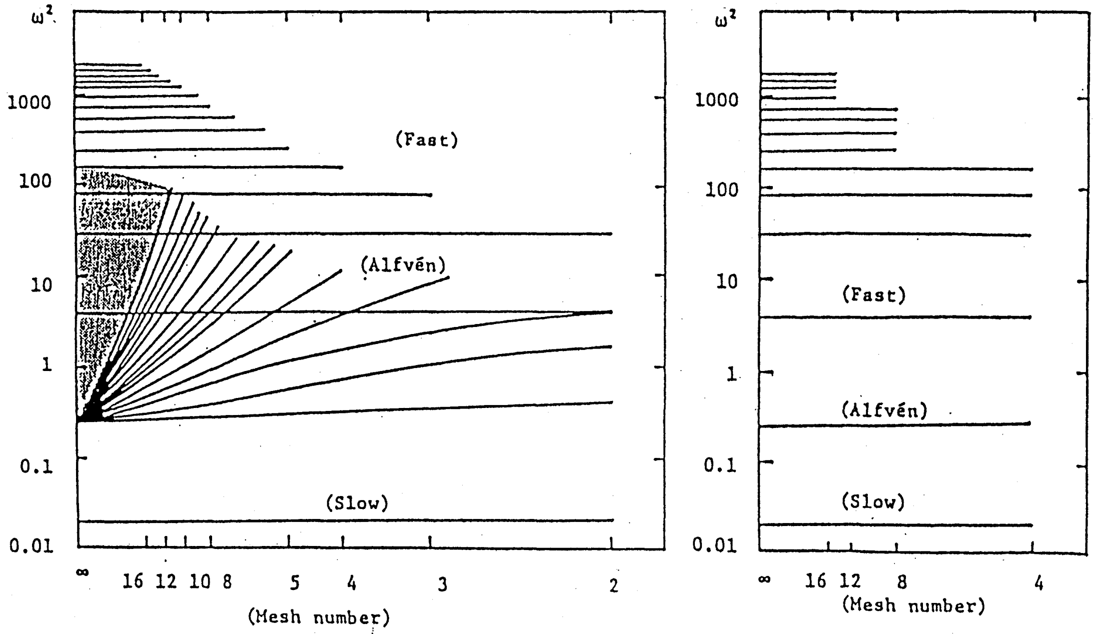
第１図　トカマク型核融合装置の概念図。



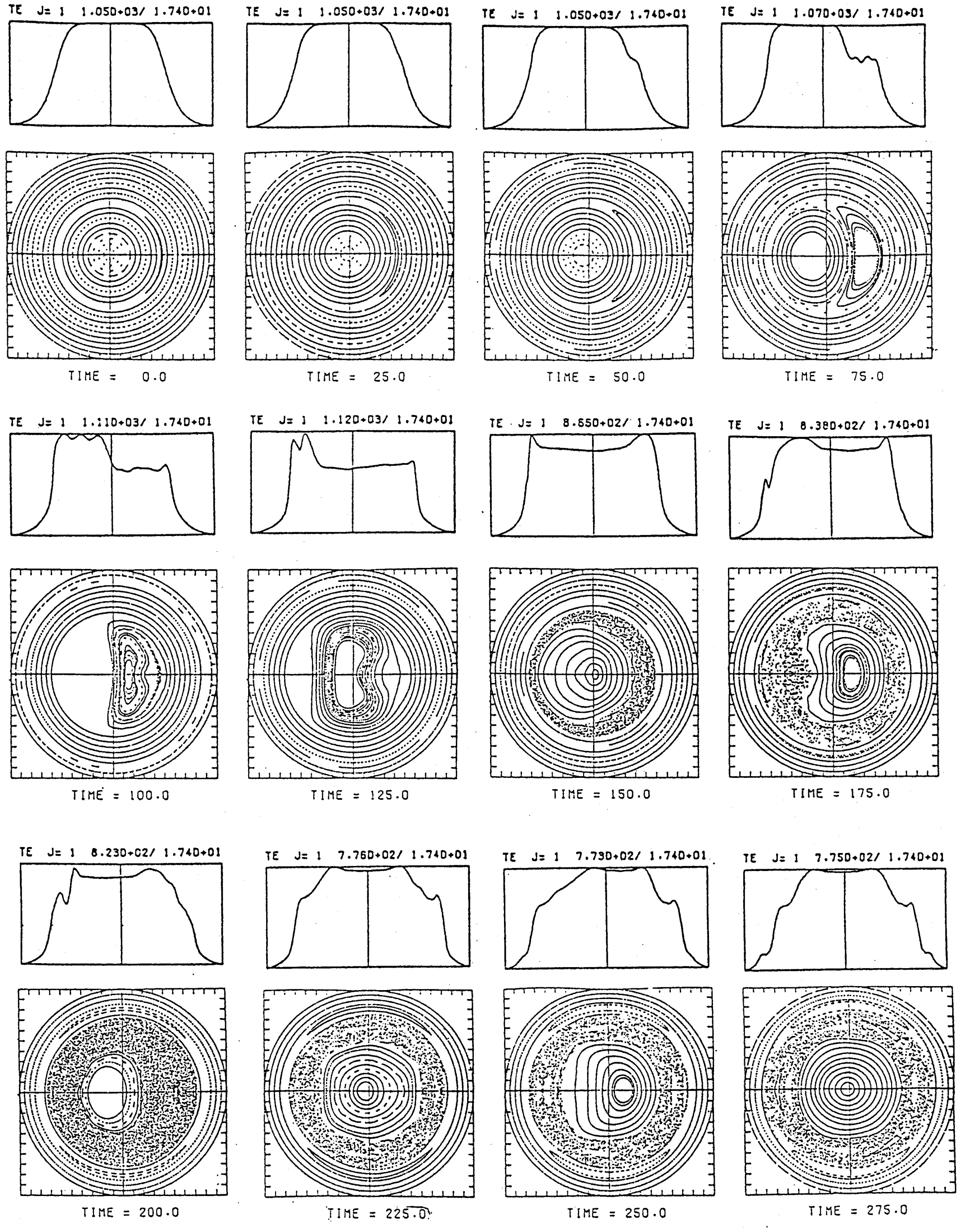
第２図　プラズマ・モデルと基礎方程式。



第３図　ＭＨＤ平衡計算領域。



第４図　スペクトル汚染の例（１次元）。発散が０の変位が正しく表現されている場合（右図）とそうでない場合（左図）。



第５図　簡約抵抗性ＭＨＤ方程式系と温度輸送方程式に基づく鋸歯状崩壊のシミュレーションの例。ポロイダル断面内の磁力線の挙動と中心面上の温度分布を示す。